Résolution numérique

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On va s'intéresser à la recherche des solutions ou racines de l'équation $f(x)=0$. Il n'est pas toujours possible d'expliciter ces racines directement à partir de la connaissance de f, on essaye alors de les encadrer puis de construire un suite qui converge vers une racine de l'équation. Pour cela on introduit une fonction auxiliaire $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to I$ appelée fonction d'itération on fonction auxiliaire associée à f. On remplace alors le problème initiale par l'équation $\Phi(x)=x$ et on calcule la suite $x_{n+1}=\Phi(x_n)$ après un choix judicieux de x_0. On dira que ξ est un point fixe de Φ lorsque $\Phi(\xi)=\xi$.

Partie I

Soit $a<b$ deux réels donnés et g une application continue de $[a,b]$ dans lui-même c'est-à-dire telle que $g([a,b])\subset[a,b]$.

1. Montrer que l'équation $g(x)=x$ possède au moins une solution dans $[a,b]$.

2. On suppose qu'il existe une constante $K\in[0,1[$ telle que pour tout couple (x,y) d'éléments de $[a,b]$ on ait

$$|g(x)-g(y)|\le K|x-y|.$$

2.a Montrer que la solution de l'équation $g(x)=x$ est unique. Nous la noterons ξ.

2.b Soit $u\in[a,b]$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=u$ et $x_{n+1}=g(x_n)$ pour $n\ge 0$. Etablir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_n-\xi|\le K^n|x_0-\xi|$. En déduire que la suite (x_n) définie ci-dessus converge vers ξ et ce quel que soit $u\in[a,b]$.

2.c Démonter que pour tout $n,p\in\mathbb{N}$ on a :

$$|x_{n+p}-x_n|\le\frac{1-K^p}{1-K}|x_{n+1}-x_n|.$$

En déduire

$$|x_n-\xi|\le\frac{K^n}{1-K}|x_1-x_0|.$$

3. On suppose ici que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant toujours $g([a,b])\subset[a,b]$ et que pour tout $x\in[a,b]$ $|g'(x)|<1$.

3.a Justifier l'existence d'un réel $K\in[0,1[$ tel que pour tout $x,y\in[a,b]$ on ait

$$|g(x)-g(y)|\le K|x-y|$$

3.b La suite (x_n) étant définie comme à la question I.2, prouver que si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq\xi$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{x_n-\xi}=g'(\xi).$$

On cherche à affaiblir la condition $g([a,b])\subset[a,b]$.

4. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi\in J$ tel que $g(\xi)=\xi$ et qu'en outre $|g'(\xi)|<1$. Démontrer qu'il existe un intervalle $I=[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ inclus dans J (avec $\varepsilon>0$) tel que

$$\forall x\in I,|g'(x)|<1 \text{ et } g(I)\subset I.$$

5. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi\in J$ tel que $f(\xi)=0$ et qu'en outre $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in J$. On considère ensuite l'application g définie sur J par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

5.a Montrer que ξ est point fixe de g et que $g'(\xi) = 0$.

5.b Justifier qu'il existe un segment I contenant ξ tel que $\forall x \in I, |g'(x)| < 1$ et $g(I) \subset I$.

5.c Soit alors $u \in I$ et la suite définie par $x_0 = u$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geq 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 0$:

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2 .$$

Partie II

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie

$$p(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \text{ avec } n \geq 2 .$$

On rappelle (ou on informe) qu'une fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines. On suppose ici que $p(x)$ admet exactement n racines deux à deux distinctes que l'on classe par ordre croissant :

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n .$$

On pose $\xi = \xi_n$ et on va approcher cette racine.

1. Montrer que $p'(x)$ s'annule exactement $n-1$ fois et classer ces annulations par rapport à celle de $p(x)$.

2. Etablir que pour tout $x \geq \xi$, $p(x) \geq 0$, $p'(x) > 0$ et $p''(x) > 0$.

3. Soit g la fonction définie sur $[\xi, +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}$.

3.a Montrer que la suite (x_n) déterminée par $x_0 \in]\xi, +\infty[$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie et minorée par ξ.

3.b Montrer que cette suite est décroissante et déterminer sa limite.

Partie III

Soit f une application à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi \in J$ tel que $f(\xi) = 0$ et qu'en outre $f'(\xi) \neq 0$. Pour chaque entier $q \geq 2$ et chaque $(q-1)$-uplet de réels $(a_1, \ldots, a_{q-1})$, on considère la fonction d'itération définie sur J par :

$$\Phi_q(x) = x - \sum_{i=1}^{q-1} a_i \big(f(x)\big)^i .$$

1.a On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et on fixe $q = 2$. Montrer que la condition $\Phi_2'(\xi) = 0$ détermine a_1 de manière unique.

1.b On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et on fixe $q = 3$. Montrer que les conditions $\Phi_3'(\xi) = \Phi_3''(\xi) = 0$ déterminent a_1 et a_2 de manière unique.

Plus généralement, on admet que si f est de classe $\mathcal{C}^q$ (avec $q \geq 2$). il existe d'unique coefficients a_j de telle sorte que toutes les dérivées de Φ_q jusqu'à l'ordre $q-1$ soient nulles en ξ.

2. Soit φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^q$ (avec $q \geq 1$) sur un intervalle I telle que $\varphi', \ldots, \varphi^{(q-1)}$ s'annulent en $\xi \in J$. On désire établir que pour tout $u \in J$ tel que $u \neq \xi$, il existe η strictement compris entre u et ξ tel que :

$$\varphi(u) - \varphi(\xi) = \frac{(u-\xi)^q}{q!} \varphi^{(q)}(\eta)$$

2.a Soit $u \in J$ tel que $u \neq \xi$ et K la constante réelle telle que

$$\varphi(u)-\varphi(\xi)=\frac{(u-\xi)^q}{q!}K$$

On introduit l'application $\psi : J \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(\xi)-\frac{(x-\xi)^q}{q!}K$$

Calculer $\psi(u)$ et $\psi^{(k)}(\xi)$ pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$.

2.b En déduire qu'il existe η strictement compris entre u et ξ tel que $\psi^{(q)}(\eta)=0$.

2.c Conclure.

3. On reprend les notations de la question III.1, Montrer qu'on peut trouver un $\varepsilon>0$ tel que si $u \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ la suite définie par $x_0=u$ et $x_{n+1}=\Phi_q(x_n)$ converge vers ξ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \xi$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^q}=\frac{\Phi_q^{(q)}(\xi)}{q!}.$$

Correction

d'après CCP PC 1997

Partie I

1. La fonction $x \mapsto g(x)-x$ est continue, prend une valeur négative en a et un valeur positive en b donc par le TVI, elle s'annule, ce qui résout notre problème.

2.a Si ξ et ξ' sont points fixes de g alors $|\xi-\xi'|=|g(\xi)-g(\xi')| \leq K|\xi-\xi'|$ implique $\xi=\xi'$ car $K \in [0,1[$.

2.b On observe $|x_{n+1}-\xi|=|g(x_n)-g(\xi)| \leq K|x_n-\xi|$. La relation demandée s'obtient alors en raisonnant par récurrence sur n. Puisque $K \in [0,1[$, on a $K^n \to 0$ et donc $x_n \to \xi$.

2.c Par l'inégalité triangulaire $|x_{n+p}-x_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1}|x_{n+k+1}-x_{n+k}|$ d'où l'on tire $|x_{n+p}-x_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1}K^k|x_{n+1}-x_n|$ car $|x_{n+k+1}-x_{n+k}| \leq K^k|x_{n+1}-x_n|$ via la lipschitzianité de la fonction g. Il vient enfin $|x_{n+p}-x_n| \leq \frac{1-K^p}{1-K}|x_{n+1}-x_n|$ puis la relation voulue. Enfin, puisque $|x_{n+1}-x_n| \leq K^n|x_1-x_0|$, on a $|x_{n+p}-x_n| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1}-x_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1-x_0|$ et la relation demandée en faisant tendre p vers $+\infty$.

3.a $x \mapsto |g'(x)|$ est définie et continue sur le segment $[a,b]$, elle y admet donc un maximum en un certain $c \in [a,b]$. Pour $K=|g'(c)|$, on a $K \in [0,1[$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|g'(x)| \leq K$ ce qui par l'inégalité des accroissements finis permet de conclure.

3.b Par le TAF, il existe c_n compris entre x_n et ξ tel que $\frac{x_{n+1}-\xi}{x_n-\xi}=g'(c_n)$. Quand $n \to +\infty$, $x_n \to \xi$ et donc par encadrement $c_n \to \xi$ puis $g'(c_n) \to g'(\xi)$ par continuité de g'.

4. Soit $\rho \in]|g'(\xi)|, 1[$. Par continuité, $|g'(x)| \xrightarrow[x\to\xi]{} |g'(\xi)| < \rho$ donc il existe un voisinage de ξ tel que sur celui-ci $|g'(x)| < \rho$. Ainsi il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \cap J$, $|g'(x)|<1$. Quitte à prendre ε assez petit, on peut supposer $I=[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \subset J$ car $\xi \in J$ et n'est pas une extrémité de J puisque J est un intervalle ouvert. De plus par l'IAF on a , pour tout $x \in I$, $|g(x)-g(\xi)| \leq \rho|x-\xi|$ donc $|g(x)-\xi| \leq |x-\xi| \leq \varepsilon$ d'où l'on tire $g(x) \in I$. Ainsi $g(I) \subset I$.

5.a $g(\xi)=\xi-0=\xi$. $g'(\xi)=1-\dfrac{f'(\xi)^2-f(\xi)f''(\xi)}{f'(\xi)^2}=0$.

5.b Il suffit d'appliquer la question I.4.

5.c Posons $C=\max\limits_{x\in I}\left|g''(x)\right|$. Ce max existe car g'' est continue et I est un segment. Par le TAF, il existe c_n compris entre x_{n+1} et ξ tel que $(x_{n+1}-\xi)=g'(c_n)(x_n-\xi)$. Or $\left|g'(c_n)\right|=\left|g'(c_n)-g'(\xi)\right|\le C\left|c_n-\xi\right|\le C\left|x_n-\xi\right|$ donc $\left|x_{n+1}-\xi\right|\le C\left|x_n-\xi\right|^2$.

Partie II

1. En appliquant le théorème de Rolle à p entre ξ_k et ξ_{k+1}, nous obtenons l'existence de $\zeta_k\in\left]\xi_k,\xi_{k+1}\right[$ tel que $p'(\zeta_k)=0$. Cela fournit au moins $n-1$ annulations à la fonction p' et il ne peut y en avoir d'autres car p' est une fonction polynomiale de degré $n-1$. On peut alors conclure que p' s'annule exactement $n-1$ fois en les $\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}$ et on observe

$$\xi_1<\zeta_1<\xi_2<\zeta_2<\cdots<\zeta_{n-1}<\xi_n.$$

2. $p(\xi)=0$, $p(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et p ne s'annule pas sur $\left]\xi,+\infty\right[$ donc par continuité $p(x)\ge 0$ sur $\left[\xi,+\infty\right[$. $p'(\zeta_{n-1})=0$, $p'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}$ et p' ne s'annule pas sur $\left]\zeta_{n-1},+\infty\right[$ donc par continuité $p'(x)>0$ sur $\left]\zeta_{n-1},+\infty\right[$. Enfin, comme pour p', p'' s'annule exactement $n-2$ fois et sa plus grande racine est strictement inférieure à ξ, donc comme ci-dessus $p''(x)>0$ sur $\left[\xi,+\infty\right[$.

3.a $g'(x)=\dfrac{p(x)p''(x)}{p'(x)^2}\ge 0$ donc g est croissante or $g(\xi)=\xi$ donc $\forall x\in\left[\xi,+\infty\right[, g(x)\in\left[\xi,+\infty\right[$. Par conséquent la suite (x_n) est bien définie et c'est une suite d'éléments de $\left[\xi,+\infty\right[$.

3.b $g(x)-x=-\dfrac{p(x)}{p'(x)}\le 0$ donc $x_{n+1}-x_n\le 0$. La suite (x_n) est donc décroissante, étant minorée elle converge et si on appelle ℓ sa limite, on obtient en passant la relation $x_{n+1}=g(x_n)$ à la limite $p(\ell)=0$ ce qui implique $\ell=\xi$.

Partie III

1.a $\Phi_2(x)=x-a_1f(x)$, $\Phi_2'(x)=1-a_1f'(x)$. La condition $\Phi_2'(\xi)=0$ équivaut alors à $a_1=1/f'(\xi)$.

1.b $\Phi_3(x)=x-a_1f(x)-a_2f(x)^2$, $\Phi_3'(x)=1-a_1f'(x)-2a_2f'(x)f(x)$ et $\Phi_3'(x)=-a_1f''(x)-2a_2(f''(x)f(x)+f'(x)^2)$. Les conditions $\Phi_3'(\xi)=\Phi_3''(\xi)=0$ équivalent à $a_1=1/f'(\xi)$, $a_2=-a_1f''(\xi)/2f'(\xi)^2$.

2.a $\psi(u)=0$ et $\psi^{(k)}(\xi)=0$ pour tout $k\in[\![0,q-1]\!]$.

2.b En appliquant le théorème de Rolle à ψ entre u et ξ, on obtient u_1 intermédiaire annulant ψ'. En appliquant alors le théorème de Rolle à ψ' entre u_1 et ξ, on obtient u_2 intermédiaire annulant ψ''. On procède ainsi de suite q fois et on obtient au final un η compris entre u et ξ tel que $\psi^{(q)}(\eta)=0$.

2.c $\psi^{(q)}(x)=\varphi^{(q)}(x)-K$ donc $K=\varphi^{(q)}(\eta)$ et le résultat cherché est démontré.

3. $\Phi_q(\xi)=\xi$ et $\Phi_q'(\xi)=0$ donc $\left|\Phi_q'(\xi)\right|<1$, il suffit d'appliquer I.4. pour conclure à l'existence de $\varepsilon>0$ tel que voulu. Par III.2., il existe η_n compris entre x_n et ξ tel que $x_{n+1}-\xi=\Phi_q(x_n)-\xi=\dfrac{(x_n-\xi)^q}{q!}\Phi_q^{(q)}(\eta_n)$.

Quand $n\to+\infty$, $x_n\to\xi$ donc par encadrement $\eta_n\to\xi$ puis par continuité $\Phi_q^{(q)}(\eta_n)\to\Phi_q^{(q)}(\xi)$. On peut alors conclure $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^q}=\dfrac{\Phi_q^{(q)}(\xi)}{q!}$.